Aufgabe 1 (vertikale Linienmethode) Typ: **schriftlich (5 Punkte)**

Bei der vertikalen Linienmethode wird die parabolische Differenzialgleichung,

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = u^0(x), \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

bezüglich des Ortes diskretisiert:

$$\frac{d}{dt}u_i(t) + \frac{-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t)}{h^2} = f_i(t).$$

Das sich so ergebende System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen soll mit der θ-Methode gelöst werden, man erhält also zu gegebenem $0 \leq \theta \leq 1$ folgende Diskretisierung

$$\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t} + A_h \left(\theta u_h^{k+1} + (1-\theta)u_h^k\right) = 0,$$

wobei A_h die Finite-Differenzen-Matrix darstellt.

a) Welches Gleichungssystem muss zur Bestimmung des Koeffizienten-Vektors u_h^{k+1} gelöst werden? Welcher Spezialfall ergibt sich für $\theta = 0$?

b) Erstellen Sie ein Matlab-Programm, das die obige Differenzialgleichung auf $I \times T = [0,1] \times [0, 0.1]$ löst. Der Anfangswert sei durch

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0.2, 0.5] \\ 0 & x \notin [0.2, 0.5] \end{cases}$$

gegeben. Wählen Sie zunächst 16 Ortsdiskretisierungen, 20 Zeitschritte und $\theta = 0.9$. Das Gleichungssystem können Sie mit dem \-Operator lösen. Geben Sie die Lösung zu allen Zeitschritten in einer einzigen Grafik aus.

c) Führen Sie nun die gleiche Rechnung mit $\theta = 0.1$ durch. Wie können Sie sich dieses Verhalten erklären? Erhöhen Sie nun die Zeitschritte auf 100. Was fällt Ihnen auf?