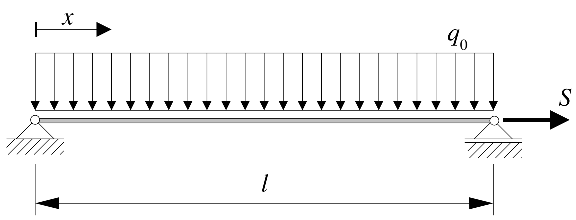
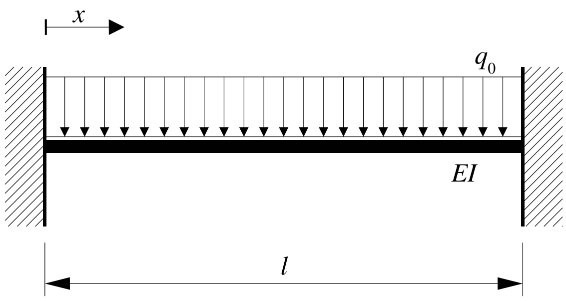
Aufgabe 1 (**Anwendungen des cg-Verfahrens**) Typ: **schriftlich (20 Punkte)**

Wir untersuchen zwei Problemstellungen aus der Mechanik. Wir vergleichen analytische Berechnungen mit Ergebnissen, die durch numerische Methoden ermittelt wurden.

Saite (Fall i)



Balken (Fall ii)



i) **Die Saite**. Eine Saite ist ein mit einer Kraft S vorgespanntes, biegeschlaffes Seil. Durch vertikale Auslenkung w kann die Saite eine vertikal aufgebrachte Last q_0 aufnehmen. Unter der Annahme kleiner Auslenkung wird diese Gesetzmäßigkeit durch die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{q}{S}.$$

Die Auslenkungslinie berechnet sich für $q = q_0 =$ const. analytisch zu

$$w_{s,exakt}(x) = \frac{q_0}{2S} x\,(l - x)\,.$$

ii) **Der Balken**. Unter Annahme kleiner Durchbiegungen gilt für den Balken mit Biegesteifigkeit EI die folgende Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

Wir betrachten einen beidseitig eingespannten Balken unter Gleichstreckenlast $q_0 =$ const. Dann erhält man für die Biegelinie

$$w_{b,exakt}(x) = \frac{q_0}{24EI} x^2 (x - l)^2.$$

Ein numerisches Verfahren zur Diskretisierung einer Differentialgleichung (d.h. Überführung der Differentialgleichung in ein System von n linearen Gleichungen) ist das Verfahren der Finiten Differenzen. Man erhält (unter vereinfachter Betrachtung der Randbedingungen) $A \cdot w_h = f$ mit

i)

$$A_{Saite} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_{Saite} = \frac{q_0}{S} \cdot h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii)

$$A_{Balken} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad f_{Balken} = \frac{q_0}{EI} \cdot h^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$h = l/(n+1)$ ist die Schrittweite der Diskretisierung. Die Randwerte $w(0)$ und $w(l)$ sind in obiger Darstellung bereits eliminiert, d.h. $(w_h)_1 = w(h)$ und $(w_h)_n = w(l-h)$. Allgemein gilt

$$(w_h)_k = w(\frac{l \cdot k}{n+1}).$$

a) Implementieren Sie die exakten Verschiebungsfunktionen in Matlab unter Verwendung der Signaturen
`function w = w_saite_exakt(x, l, q_0, S)`
`function w = w_balken_exakt((x, l, q_0, EI)`.

b) Stellen Sie die Gleichungssysteme für die Saite und den Balken in Matlab auf (Dabei sei die Anzahl der Unbekannten variabel).
Hinweise: Verwenden Sie den `spdiags`-Befehl. Verwenden Sie zwei Script-Files.

c) Lösen Sie die Gleichungssysteme mit dem cg-Verfahren für $n = 10$ (Saite) bzw. $n = 100$ (Balken). Die Abbruchbedingung sei $tol = 10^{-4}$ für das relative Residuum bei maximal 1000 Iterationen. Der Startvektor sei der Nullvektor. Ausserdem seien $q_0 = 5$ kN/m, $l = 10$ m, $S = 1000$ kN und $EI = 4000$ kNm^2.

d) Bestimmen Sie die Verschiebungsfiguren der Saite (mit $n = 10$) und des Balkens (mit $n = 100$) anhand der numerischen Lösung. Stellen Sie die exakte Lösung für w zum Vergleich im selben Plot dar.

e) Plotten Sie die Kondition der Matrizen A_{Saite} und A_{Balken} für $10 \leq n \leq 100$.

f) Plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen, um eine Abbruchbedingung von $tol = 10^{-11}$ zu erreichen, für $10 \leq n \leq 100$.

g) Welchen Zusammenhang beobachten Sie zwischen den Konditionen der Matrizen und der Anzahl der benötigten Iterationen?

Hinweis: Eine Implementierung des cg-Verfahrens in Matlab können Sie unter

`http://matlabdb.mathematik.uni-stuttgart.de`

herunterladen. Sie können auch die Matlab-Funktion `pcg` verwenden, verwenden Sie dabei die Option `M=[]`, um `pcg` ohne Vorkonditionierer aufzurufen. (Siehe auch `help pcg`).